

2^ο φύλλο ασκήσεων.

1 Δείξτε ότι για μοντέλο "δύονης" με $P=\phi$ και $k=\phi$, η ηλικία του Σύμπαντος, ως συνάρτηση της μετατόπισης στο φως, δίνεται από τη σχέση: $\frac{t(z)}{t_H} = \frac{2}{3} \frac{1}{(1+z)^{3/2}}$, όπου $t_H = \frac{1}{H_0}$. Αν $H_0 = 70 \text{ km/sec/Mpc}$, βρείτε την ηλικία για $z=0$. Τι συμπέρασμα βγάζετε? Πόσο πίσω στο χρόνο κοιτάμε όταν παρατηρούμε ένα αντικείμενο με μετατόπιση στο φως ίση με z ;

2 Δείξτε ότι: $H = - (1+z)^{-1} \frac{dz}{dt}$. Θεωρείστε την εξίσωση του Friedmann για επίπεδο Σύμπαν με $\Omega_{\text{rad}} = \phi$ (που είναι μια κακή προσέγγιση για το δικό μας Σύμπαν, σχεδόν για όλες τις χρονικές περιόδους, όπως πιστεύουμε σήμερα). Δείξτε ότι:

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = H_0^2 (1+z)^2 \left\{ (1+z)^2 (1+z \Omega_{\text{rad}, \phi}) - z(2+z) \Omega_{\text{rad}, \phi} \right\}.$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να λυθεί αναγκαστικά για να μας δώσει το $t(z)$, δηλαδή το χρόνο που χρειάστηκε το φως να φτάσει σε μας από ένα γαλαξία με μετατόπιση στο φως ίση με z (ή για την ηλικία του Σύμπαντος, όταν $z=\infty$).

3 Ο Ανοστάιν εισήγαγε την κοσμολογική σταθερά για να "ισορροπήσει" το Σύμπαν έτσι ώστε ούτε να διαστέλλεται ούτε να συστέλλεται. α) Βρείτε μια σχέση μεταξύ του Λ και του ρ_m για Σύμπαν στατικό, που περιέχει μόνο μάζα και Λ . β) Υπολογίστε το k σ' αυτή την περίπτωση και δώστε μία εξήγηση γιατί το μοντέλο αυτό είναι ασταθές.

④. Η κοσμολογική σταθερά Λ γίνεται κυρίαρχη καθώς ο παράγοντας κλίμακας αυξάνεται, έτσι όπως γινάσκουμε το Σύμπαν σήμερα. Χρησιμοποιείστε την εξίσωση του Friedmann για να δείξετε ότι η σταθερά του Hubble όντως τείνει προς μία σταθερή τιμή, για ένα επίπεδο Σύμπαν, όταν το Λ "κυριαρχεί" και βρείτε την τιμή αυτής της σταθεράς (σε $\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$).